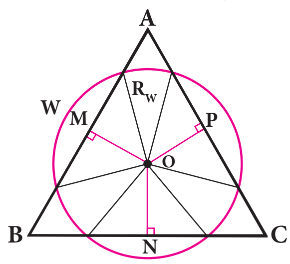
نامساویِ اویلر

اشاره

لئونارد اویلر[1] ریاضی‌دان و فیزیک‌دان برجستهٔ سوئیسی، در سال ۱۷۶۷ قضیه‌ای را در هندسه منتشر کرد که اکنون به رابطهٔ اویلر مشهور است ($OI^۲=R^۲-۲Rr$). از این رابطه می‌توان به نامساوی $R\geq ۲r$ پی برد که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی است. از آن به بعد اثبات‌ها و تعمیم‌های متفاوتی برای این نامساوی در مجلات ریاضی دنیا منتشر شد. ما نیز در این مقاله سعی داریم اثباتی ساده و مقدماتی برای این نامساوی مطرح کنیم.

محمد طبیعی*
دانش‌آموز سال چهارم
رشتهٔ ریاضی
دبیرستان علامه طباطبایی تهران

قضیه: دایرهٔ W با شعاع R_W با هر سه ضلع مثلث ABC متقاطع است. آن‌گاه داریم: $R_W\geq r$ (r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است).



اثبات: از O (مرکز دایرهٔ W) بر اضلاع AB، BC و AC عمودهای OM، ON و OP را وارد می‌کنیم. از آنجا که در مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگ‌ترین ضلع است، پس: $OM\leq R_W$، $ON\leq R_W$ و $OP\leq R_W$. از طرف دیگر داریم:

مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ = مساحت $\overset{\Delta}{AOB}$ + مساحت $\overset{\Delta}{BOC}$ + مساحت $\overset{\Delta}{AOC}$

$$=\frac{OM\times AB}{۲}+\frac{ON\times BC}{۲}+\frac{OP\times AC}{۲}$$

همچنین با توجه به نامساوی‌های گفته شده داریم:

$$\frac{OM\times AB}{۲}+\frac{ON\times BC}{۲}+\frac{OP\times AC}{۲}\leq R_W\left(\frac{AB+AC+BC}{۲}\right)$$

در نتیجه:

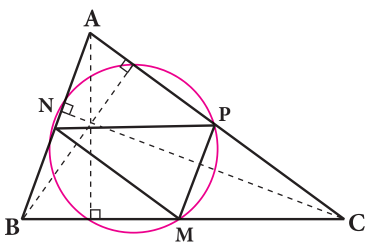
$S\leq R_W.P$

$$\Rightarrow \frac{S}{P}\leq R_W \Rightarrow r\leq R_W$$

(P نصف محیط مثلث است و می‌دانیم که: $r=\frac{S}{P}$ [2])

اکنون قصد داریم با استفاده از این قضیه، نامساوی اویلر را ثابت کنیم.

نامساوی اویلر: در هر مثلث، با شعاع دایرهٔ محیطی R و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی r، داریم: $R\geq ۲r$.



اثبات: فرض کنید M، N و P اوساط اضلاع BC و AB و AC باشند. روشن است که دو مثلث MNP و ABC با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ با هم متشابه‌اند. پس شعاع دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{MNP}$ نصف شعاع دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{ABC}$ است. از طرف دیگر، دایرهٔ محیطی MNP با هر سه ضلع مثلث متقاطع است (این دایره از پای ارتفاعات مثلث نیز می‌گذرد). در نتیجه، بنابر قضیهٔ قبل می‌توان گفت:

$$\frac{R}{۲}=R_{\overset{\Delta}{MNP}}\geq r\Rightarrow R\geq ۲r$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که پای ارتفاعات و اوساط اضلاع برهم منطبق باشند. یا به‌عبارت دیگر، مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

پی‌نوشت‌ها

1. Leonhard Euler
۲. اثبات فرمول $r=\frac{S}{P}$ در کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، ترجمهٔ زنده‌یاد مصحفی از انتشارات مدرسه آمده است.

* htabiee@gmail.com